Widom scaling hypothesis

بسم الله الرحمن الرحیم

فرضیه مقیاسی رفتار کردن توابع ترمودینامیک

Scaling Behavior $\longleftrightarrow$ Homogenous function

جهت توصیف

بهتر شناختن از خواص ترمودینامیک مواد در نزدیکی و در نقطه بحرانی

$$(x, \phi) : \phi(x)$$

x → Independent Parameter / Variable

ϕ → Dependent parameter

$$x \to bx \longrightarrow \phi(x) \xrightarrow[x \to bx]{} \phi'(bx) \triangleq b^{\alpha'} \phi(x)$$

یادآوری

$D=2$	$D=2$	$D=2$	
$N=1$	$N_{l'}=3$	$N_{l''}=9$	$\boxed{N(l) \sim l^{\alpha}}$
$l=1$	$l'=1/2$	$l''=\frac{1}{4}$	$N_l \sim l^{-d_f}$
$N(l=1)=1$	$N(l'=\frac{1}{2}) \triangleq 3$	$N(l''=1/4) \triangleq 9$	$\boxed{d_f = \frac{\log 3}{\log 2}}$

$$3 = (1/2)^{\alpha'}$$

$$\log 3 = -\alpha' \log 2$$

$$\alpha' = -\frac{\log 3}{\log 2}$$

$$9 = (1/4)^{\alpha''}$$

$$\alpha'' = -\frac{\log 9}{\log 4} = -\frac{\log 3}{\log 2}$$

متغیر دلخواه
$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(bx) = b^{\cdots} \\ \phi(x) = b^{\alpha}\phi(bx) \end{array} \right. \leftarrow$$
مثال عملی تابعی با رفتار مقیاسی Scaling

$t = \frac{T - T_c}{T_c}$ ؛ H میدان مغناطیسی

$$f(t, h) \longrightarrow \text{Behaves as Scaling function}$$

Free-Energy

$$\left. \begin{array}{l} t \rightarrow \lambda^a t \\ h \rightarrow \lambda^b h \end{array} \right\} \rightarrow f(t,h) \rightarrow f' \qquad a \neq b$$

در نقطه بحرانی
$$* \boxed{f' = f(\lambda^a t, \lambda^b h) = \lambda f(t,h)} *$$
برقرار است

(عملاً این فرض تنها تابعی درستی است که در نقطه بحرانی جواب می‌دهد)

با دانستن a و b می‌توان کلیه نماهای مقیاسی را تعیین کرد.

با فرض $\left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1 \end{array} \right. \leftarrow$ سایر نماها چه ارتباطی با a, b دارند؟

① $M = -\frac{\partial F}{\partial H}$
$$\boxed{M \sim t^{\beta} \Big|_{h=0}}$$

$$\frac{\partial}{\partial h} \quad f(\lambda^a t, \lambda^b h) = \lambda f(t,h)$$

$$\lambda^b M(\lambda^a t, \lambda^b h) = \lambda M(t,h)$$

$h = 0$, $\lambda = t^{-1/a}$ فرض $\rightarrow$
$$\boxed{t^{-b/a} M(1, 0) = t^{-1/a} M(t, 0)}$$

$$M(t) = t^{\frac{1-b}{a}} M \implies M(t) \sim t^{\frac{1-b}{a}} \sim t^{\beta}$$

یک مقدار ثابت

$$\boxed{\beta \equiv \frac{1-b}{a}}$$

② $M \sim h^{1/\delta}$ $\qquad \delta = ?$

$$\lambda^{b} M(\lambda^{a} t, \lambda^{b} h) = \lambda M(t, h)$$

$t = 0$, $\lambda = h^{-1/b}$ $\longrightarrow$ $M(0,h) = h^{\frac{1-b}{b}} M(0,1)$

$$\simeq h^{1/\delta}$$

$$\boxed{\delta = \frac{b}{1-b}}$$

③ $\chi = \frac{\partial M}{\partial h}\Big|_{h=0} \sim t^{\gamma}$

$$\lambda^{2b} \chi(\lambda^{a} t, \lambda^{b} h) = \lambda \chi(t, h)$$

$h = 0$, $\lambda = t^{-1/a}$ $\longrightarrow$ $\chi(t,0) = t^{\frac{1-2b}{a}} \chi(1,0)$

$$\sim t^{\frac{1-2b}{a}} \sim t^{\gamma}$$

$$\boxed{\gamma = \frac{1-2b}{a}}$$

④ $C = -T \frac{\partial^2 f}{\partial T^2}\Big|_{h=0}$, $\boxed{f(\lambda^{a} t, \lambda^{b} h) = \lambda f(t,h)}$

$$\lambda^{2a} C(\lambda^{a} t, \lambda^{b} h) = \lambda C(t, h)$$

$-1/$

$h=0 \ , \ \lambda = t^{a}$

$$C(t,0) \sim t^{\frac{1}{a}-2} C(1,0) \sim t^{\frac{1}{a}-2} \sim t^{-\alpha}$$

$$\boxed{\alpha = 2 - 1/a}$$

Summary

$$* \ f(\lambda^{a} t, \lambda^{b} h) = \lambda f(t,h) \ *$$

$$\rightarrow f_{\ell}(t_{\ell}, h_{\ell}) = \lambda f(t,h) \leftarrow$$

$\alpha = 2 - 1/a$

اگر a , b را داشته باشیم به تمامی اسکیلینگ نماها قابل تعیین هستند

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 2 - 1/a \ - \\ \beta = \frac{1-b}{a} \ - \\ \delta = \frac{b}{1-b} \ - \\ \gamma = \frac{2b-1}{a} \ - \end{array} \right\}$$

چون در آزمایش دیدیم که C , α , M رفتار مقیاسی از خودشان می‌دهند Widom گفت که ریشه چنین رفتاری از خاصیت خودمتشابهی توابع پتانسیل ترمودینامیکی است.

- تعیین مقدار a , b در فرضیه Widom امکان پذیر نیست.
- هیچ ردپایی از بعد (d) در نماها نیست. آن دسته از نماهایی که ردپای بعد فضایی در آن‌ها نیست (به صورت صریح) توسط ترکیب‌هایی از a و b بدست می‌آیند.

نقشه راه برای ادامه

① Linear RG

② Perturbative RG ← تمام اصلاحات بر روی نماها را بدست می‌دهد

(Non-linear) RG

ϵ - Expansion
Operator - Product - Expansion
Correction to scaling exponent Relation

بنا به توضیحات کلی در خصوص خاصیت خود متشابهی Self-Similarity

در نقطه بحرانی، و البته انحراف از این ویژگی به محض اینکه از نقطه بحرانی که با مقدار ثابت های

جفت شدگی

$$\left(L = \int d^d r \left((\nabla S)^2 + \underbrace{\underset{t}{a(t)} S^2 + \underset{u}{b(t)} S^4 - \underset{h}{h} S}_{\text{ثابت های جفت شدگی}} \right) \right)$$

هامیلتونی برحسب پارامتر نظم نوشته شده

تعیین می‌شوند، می‌توان به محاسبه نماهای مقیاسی پرداخت.

نکته مهمی باید در نظر بگیریم وجود طول‌های همبستگی است ریشه در وجود تقارن‌ها دارد که در

رفتار خودتشابهی به آن توجه می‌شود و در بستر RG قابل کمی کردن است.

Symmetry and phase Transition

Q1: Relation between Critical System and symmetries ?

Q2: Consequences of Symmetries ?

$$RG \equiv R \circ R \circ I$$

Kernel

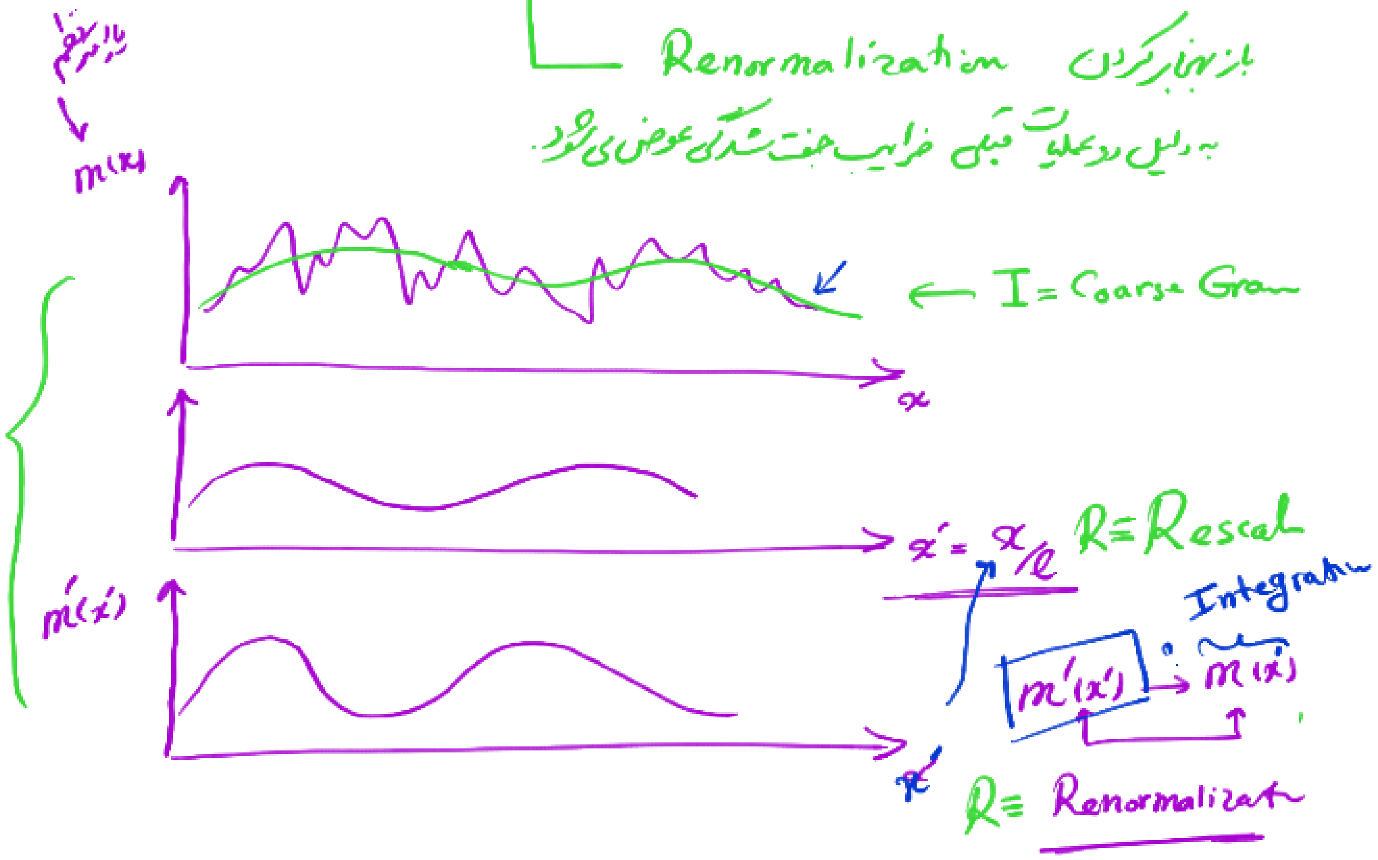
Integration (Coarse graining)

Rescaling دانه درشت کردن

بازمقیاس کردن

Renormalization بازبهنجار کردن

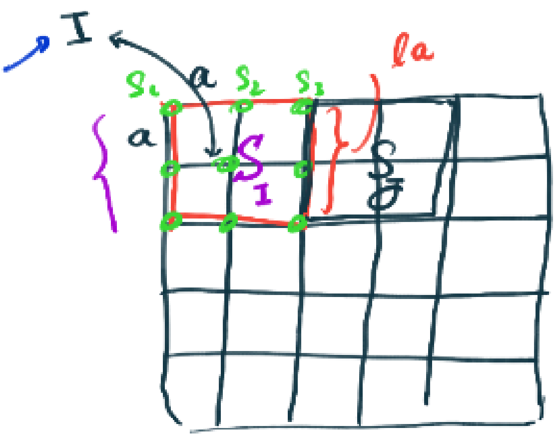
به دلیل روند عملیات قبلی ضرایب جفت شدگی عوض می‌شود.



Spins – Block → "Kadanoff Idea"

1966 → Fisher → Wilson 1971

ساده‌ترین روش R مبتنی است بر ایده کادانوف



① N : تعداد کل اسپین‌ها

$S_i = \pm 1$, $i = 1, N$

② a : lattice constant

ثابت شبکه

③ $a \ll \ell a \lesssim \xi(t)$

$\xi_{physical} = \xi a$ → Comoving length

طول همراه

$N(\ell=1) = N_\ell(1) = N$

$a \to \ell a$

$$N(l \neq 1) = N_l(l) = \xi'(l) \longleftarrow$$ با ... تعداد درجات آزادی سیستم کم می‌شود

حرکت فیزیکی

$$\xi_{phy} = \xi a \xrightarrow{a \to la} \xi_{phys} = \xi'_{phy} = \xi' a'$$

$$\xi a = \xi' la \rightarrow \boxed{\xi' = \xi / l}$$

معیار طول همبستگی ← پس فرض این که با این عملیات طول همبستگی کوچک می‌شود.

دقیقا در نقطه بحرانی $\xi' = \xi \longrightarrow$ فیکسد پوینت ما نقطه بحرانی است می‌دهیم

④ $$S_I = \frac{1}{l^d} \sum_{i \in I}^{l^d} S_i \longleftarrow \underline{\text{Integration}}$$

نماینده اسپین در

$$|m_l| = \frac{1}{l^d} \sum_{i \in I}^{l^d} \langle S_i \rangle \longleftrightarrow$$ انتظار داریم در نقطه بحرانی با بزرگتر شدن $\underline{l}$ این کمیت کوچک شود.

$$|m_l| \sim l^{-\Delta} \rightarrow \Delta \equiv \text{Anamolous Dimension for } S$$

$$S_I \rightarrow S'_I = \frac{1}{|m_l|} S_I =$$

$$\Delta = \frac{b}{a} = \frac{x_h}{x_t}$$

$$\lambda^a t \qquad \lambda^b h$$

$$S'_I = l^{\Delta} \underbrace{\frac{1}{l^d} \sum_{i \in I}^{l^d} S_i}_{\text{انتگرال‌گیری شده}} \longleftarrow$$ تلفیق انتگرال‌گیری شده و بازبهنجارش شده است

$$S'_I \rightarrow S_l = \frac{l^{\Delta}}{l^d} \sum_{i \in I}^{l^d} S_i$$

$$S_{l'} = \frac{l'^{-}}{l'^{d}} \sum_{i \in I}^{x} S_i$$

$$S_{l''} = \frac{l''^{\Delta}}{l''^{d}} \sum_{i \in I}^{l''^{d}} S_i \quad , \quad l'' = l l'$$

پس مطالب بالا متناسب است یعنی که اگر از مشهود فیزیکی در خصوص رفتار $|m_l|$ استفاده نمی‌کردم

پس علی الاصول باید می‌نوشتم

$$S'_l = \frac{\overset{\text{؟}}{\lambda(l)}}{l^d} \sum_{i \in I}^{l^d} S_i$$

l ، l' ، $l'' = l l'$ $\longrightarrow$ $\lambda(l l') = \lambda(l)\lambda(l')$

$$\downarrow$$

$\lambda(l) = l^{\Delta}$

شرط لازم و کافی

ارائه یک دستگاه در نظر گرفتن دو فرض مهم $\leftarrow$ یافتن نقطه بحرانی

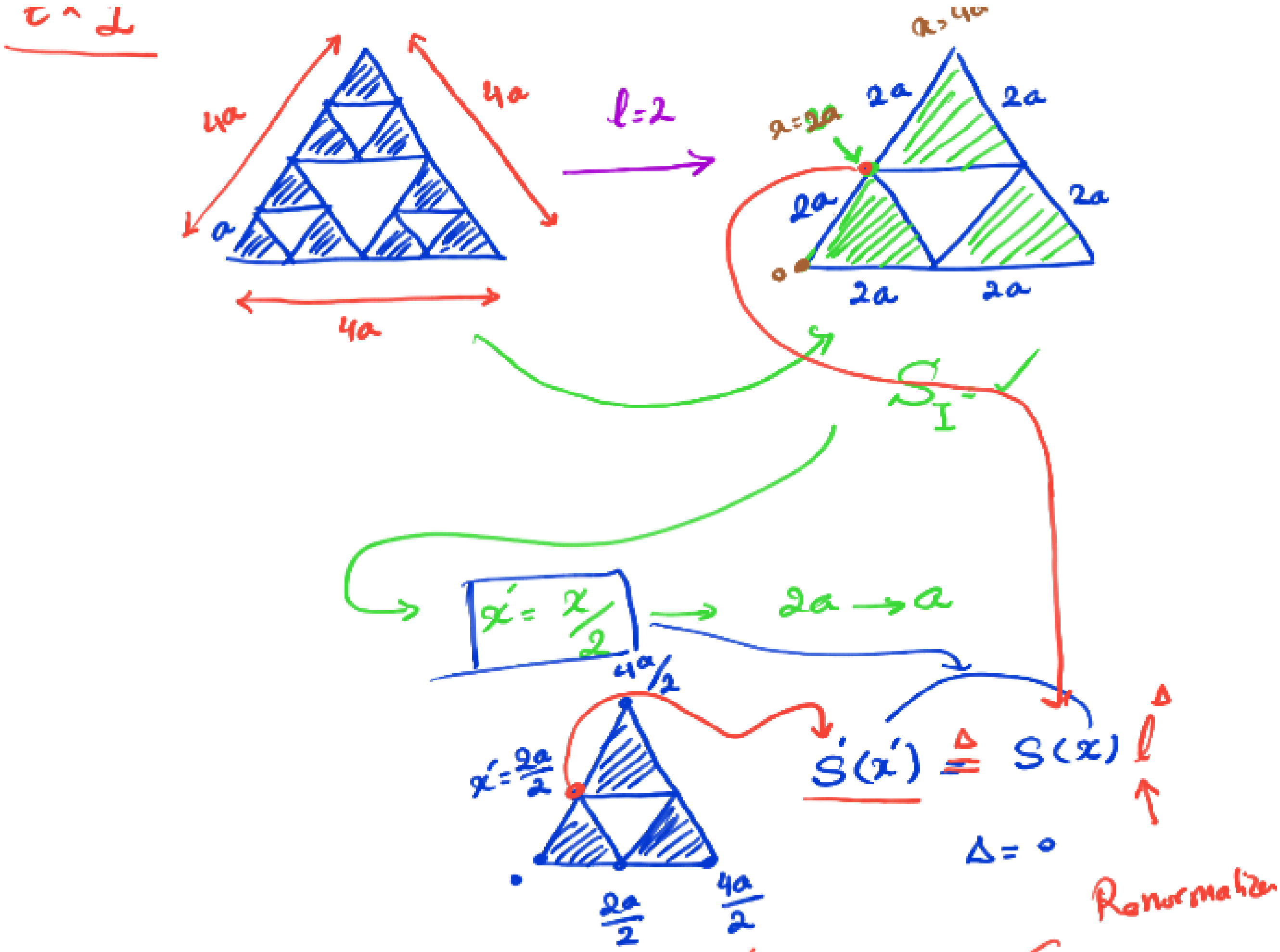
در جلسه بعد بررسی خواهد شد.

بسم الله الرحمن الرحیم

یادآوری از مباحث گذشته

- Integration $\quad S_I = \dfrac{1}{l^d} \displaystyle\sum_{i \in I}^{l^d} S_i$
- Rescale $\quad x \to x' = x/l \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_l = \xi / l \\ \text{کوچک‌تر شدن طول همبستگی است} \end{array} \right.$
- Renormalization $\quad S_I(x) \to \underline{S'(x') = S(x') \, l^{\Delta}}$ $\quad \boxed{\Delta = 0}$

Ex 1



دقت کنیم که در حد ترمودینامیک هستیم یعنی درزها را نمی‌بینیم

RoRoT

(5) $\rightarrow S'_l(x') = S_l(x)\, l^{\Delta} \longrightarrow$ Anomolous Dimension of S

$$\Delta \rightarrow \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} t \rightarrow t_l = l^{a} t \\ h \rightarrow h_l = l^{b} h \end{matrix} \quad \text{or} \quad \begin{matrix} a = x_t \\ b = x_h \end{matrix}$$

(6) در نقطه بحرانی شکل هامیلتونی عوض نمی‌شود

→ به طور کلی ←

{سیستمی که در حال بررسی آن هستیم در نقطه بحرانی با عملیات $\underbrace{\text{RoRoT}}_{R_l}$ تغییر نمی‌کند}

شرط لازم و کافی ← $\mathcal{H}$ عوض نمی‌شود

$$\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_\ell$$

Suppose $\quad \mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j - h \sum_i s_i$

در سطح میکروسکوپیک

$$\downarrow \ell a$$

$$\mathcal{H}_\ell = -J_\ell \sum_{I,J}^{N/\ell^d} S_I S_J - h_\ell \sum_{I}^{N/\ell^d} S_I = -J \sum_{ij} s_i s_j - h \sum s_i$$

شرط لازم و کافی

فرض

$$\rightarrow \mathcal{H}_\ell[K_\ell] = \mathcal{H}[K]$$

$$\boxed{\{K_\ell\} = R_\ell \{K\}}$$

رابطه‌ی بین ضرایب جفت‌شدگی بعد از بازبهنجارش

$$Z \xrightarrow{R_\ell} Z_{N_\ell}[\mathcal{H}_\ell] = Z_N[\mathcal{H}]$$

سیستم خود متشابه‌اش

$$\downarrow$$

$$F_\ell(N_\ell, \mathcal{H}_\ell) = F(N, \mathcal{H}) \qquad f(N,\mathcal{H})\, N$$

$$f_\ell = \frac{F_\ell(N_\ell, \mathcal{H}_\ell)}{N/\ell^d} = \frac{F(N,\mathcal{H})}{N/\ell^d} = \frac{f(N,\mathcal{H})\, \cancel{N}}{\cancel{N}/\ell^d}$$

$$f_\ell(R_\ell\{K\}) = \ell^d f(\{K\})$$

$$\boxed{f_\ell(t_\ell, h_\ell) = \ell^{d} f(t,h)} \qquad \boxed{\begin{array}{l} t_\ell = \ell^{x_t} t \\ h_\ell = \ell^{x_h} h \end{array}}$$

(7)
$$\left\{\begin{array}{l} N \to N_\ell = \ell^{-d} N \\ \xi \to \xi_\ell = \ell^{-1} \xi \end{array}\right\}, \left\{\begin{array}{l} t_\ell = \ell^{x_t} t \\ h_\ell = \ell^{x_h} h \end{array}\right\} \qquad \underbrace{x_t, x_h > 0}$$

با دانه درشت کردن درحالت کلی سیستم از وضعیت بحرانی خود دور می‌شود

چون طول همبستگی کوچک می‌شود دمای منتسب به سیستم گرم تر می‌شود

$$h \sum_{i=1}^{N} s_i = h \sum_{I}^{N/\ell^d} \sum_{i \in I} s_i$$

$$= h \frac{\ell^{d-\Delta}}{\ell^{d-\Delta}} \sum_{I}^{N/\ell^d} \sum_{i \in I} s_i$$

$$= h \ell^{d-\Delta} \sum_{I}^{N/\ell^d} \underbrace{\frac{\ell^{\Delta}}{\ell^{d}} \sum_{i \in I} s_i}$$

$$\text{RoRoI} \to S_\ell$$

$$h \sum_{i=1} s_i = \underbrace{h \ell^{d-\Delta}}_{h_\ell} \sum_{I}^{N/\ell^d} S_\ell$$

$$h_\ell = \ell^{x_h} h = \ell^{\Delta-d} h \to \boxed{x_h = \Delta - d}$$

(8) $\xi \sim t^{-\nu}$

$$\begin{cases} (\xi_\ell)^{x_t} = \left(\xi/\ell\right)^{x_t} \\ t_\ell = \ell^{x_t}\, t \end{cases} \longrightarrow t_\ell\, \xi_\ell^{x_t} = \underbrace{\xi^{x_t}\, \ell^{-x_t}\, t_\ell}$$

$$\downarrow$$

$$\xi_\ell^{x_t}\, t_\ell = \xi^{x_t}\, t$$

$$\downarrow$$

بصورت تکراری انجام دادم

$$\xi_{\ell^n}^{x_t}\, t_{\ell^n} = \xi^{x_t}\, t \sim \underbrace{\mathcal{O}(1)}_{\text{یا 1؟}}$$

$$\xi^{x_t}\, t \sim 1 \longrightarrow \xi \sim t^{-\frac{1}{x_t}} \sim t^{-\nu}$$

$$\boxed{\nu = \frac{1}{x_t}}$$

9 $\quad M \sim t^{\beta}$

$$M_\ell = \langle S_\ell \rangle_{ens} = \ell^{\Delta - d} \sum_{i \in I} \langle S_i \rangle_{ens} = \ell^{\Delta} M$$

$$M_\ell = \ell^{\Delta} M$$

$$M(t_\ell, h_\ell) = \ell^{\Delta} M(t,h)$$

$$M(\ell^{x_t} t, \ell^{x_h} h) = \ell^{\Delta} M(t,h) \longrightarrow \boxed{\beta = \nu \Delta}$$

10. $\quad M \sim h^{1/\delta} \longrightarrow \boxed{\delta = \frac{d - \Delta}{\Delta}}$

(11) $\chi \sim t^{\gamma} \longrightarrow \gamma = \dfrac{2\Delta - d}{x} = \nu(2\Delta - d)$

(12) $\langle S_I S_J \rangle = \ell^{2\Delta - 2d} \underbrace{\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \langle s_i \cdot s_j \rangle}_{\ell^{2d} \langle s_i \cdot s_j \rangle}$

$= \ell^{2\Delta} \underbrace{\langle s_i \cdot s_j \rangle}$

$r = |i - j|$

$r_\ell = |I - J|$

$$\boxed{G(r_\ell, t_\ell, h_\ell) = \ell^{2\Delta}\, G(r, t, h)}$$

فاصله نسبی بزرگتر گرفته

خاصیت همگنی رو می‌گیرد

$$G(r, t, 0) = \frac{e^{-r/\xi}}{r^{d-2+\eta}} \rightarrow \Delta = \frac{d-2+\eta}{2}$$

$$\boxed{\eta = 2\Delta - d + 2}$$

$$\boxed{\Delta = \frac{x_h}{x_t}}$$

بدون اثبات

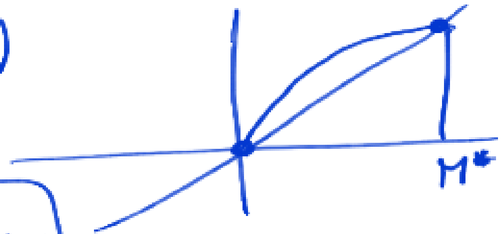
با دانستن $\boxed{\Delta \text{ و } x_t}$ سایر نماهای بحرانی را بدست می‌آرید.

تعریف نقطه بحرانی:

$[K_\ell] = R_\ell [K] = [K^*] = R_\ell [K^*]$

$\ell = (1+\delta\ell)$ خطی کردن

$$M = \tanh(M)$$



$$\boxed{M^* = \tanh(M^*)}$$

$$t_\ell = \ell^{x_t}\, t \qquad t^* = t_\ell = \ell^{x_t} t^*$$

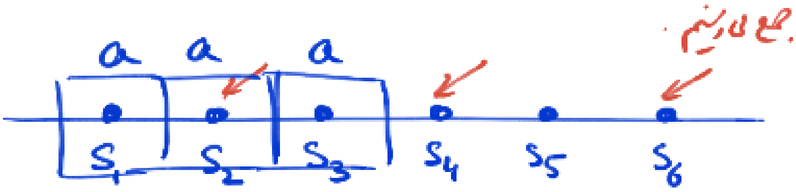
$\ell \to 0$. $\quad \ell = 1 + \delta\ell$.

$$t^* = (1+\delta\ell)^{x_t}\, t^*$$

$$= t^*(1 + x_t\,\delta\ell)$$

$$t^* = t^* + x_t\,\delta\ell.$$

EX 3 Ising Model in 1D Periodic BC.



$$Z_N(t,h) = \sum_{\{S_i\}} e^{\sum_{i=1}^{N}\left[K_0 + K_1 S_i S_{i+1} + \frac{K_2}{2}(S_i + S_{i+1})\right]}$$

$$[K] = \{K_0, K_1, K_2\}$$

$$\cdot\{K_0, t, h\}$$

در مدل آیزینگ داریم

$K_0 = 0$

$K_1 = \beta J$

$K_2 = \beta H$

$S_i = \pm 1$

$$Z_N = \sum_{\substack{\{S_i\} \\ i=1,N}} \underbrace{\prod_{i=1}^{N} e^{\left[K_0 + K_1 S_i S_{i+1} + \frac{K_2}{2}(S_i + S_{i+1})\right]}}$$

$$\prod_{j=1}^{N/2} e^{2K_0 + K_1\left(\underbrace{S_{2j-1}}\,\underbrace{S_{2j}} + \underbrace{S_{2j}}\,\underbrace{S_{2j+1}}\right) + \frac{1}{2}K_2\left(S_{2j-1} + S_{2j} + S_{2j+1}\right)}$$

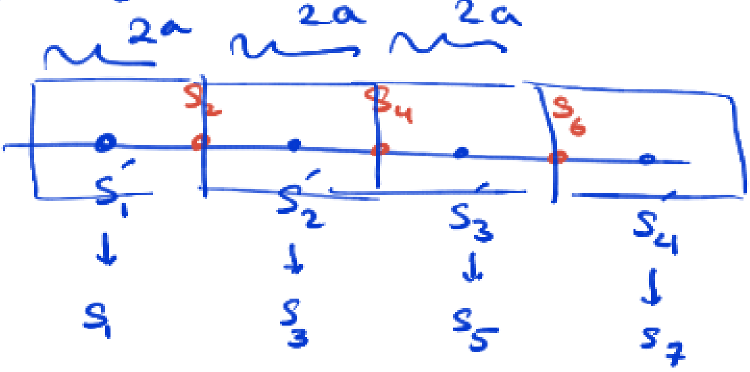
حال روی $S_{2j} = \pm 1$ جمع می‌زنیم

$$\prod_{j=1}^{N/2} e^{2K_0}\, 2\cosh\left\{K_1\left(\underbrace{S_{2j-1}}_{j} + \underbrace{S_{2j+1}}_{j+1}\right) + K_2\right\} e^{\frac{K_2}{2}\left(S_{2j-1} + S_{2j+1}\right)}$$

نام‌گذاری عوض می‌کنیم

(A) $$Z_N(t,h) = \sum_{\{S'_j\}} \prod_{j=1}^{N/2} \left[e^{2K_0}\, 2\cosh\left\{K_1\left(S'_j + S'_{j+1}\right) + K_2\right\} e^{\frac{1}{2}K_2\left(S'_j + S'_{j+1}\right)} \right]$$

نصف اسپین‌ها حذف شده‌اند



(B) $$Z_{N/2}(t,h) = \sum_{\{S'_j\}} e^{\sum_{j=1}^{N'} \left\{K'_0 + K'_1 S'_j S'_{j+1} + \frac{1}{2} K'_2 \left(S'_j + S'_{j+1}\right)\right\}}$$

$$A = B \rightarrow$$

$$e^{K_0' + K_1' S_j' S_{j+1}' + \frac{1}{2} K_2' (S_j' + S_{j+1}')} = e^{2K_0}\, 2\cosh\{K_1 (S_j' + S_{j+1}') + K_2\}\, e^{\frac{K_2}{2}(S_j' + S_{j+1}')}$$

$$\{K_0, K_1, K_2\} \longleftarrow \{K_0', K_1', K_2'\}$$ ۳ تا مجهول

$S_j' = S_{j+1}' = +1$ — معادله اول

$S_j' = S_{j+1}' = -1$ — معادله دوم

$\rightarrow S_j' = -S_{j+1}' = \pm 1$ — معادله سوم

$$① \quad e^{(K_0' + K_1' + K_2')} = e^{2K_0 + K_2}\, 2\cosh(2K_1 + K_2)$$

$$② \quad e^{(K_0' + K_1' - K_2')} = e^{2K_0 - K_2}\, 2\cosh(2K_1 - K_2)$$

$$③ \quad e^{K_0' - K_1'} = e^{2K_0}\, 2\cosh(K_2)$$

اگر $h=0$ میدان خارجی صفر باشد $\longrightarrow K_2 = 0$

$$\begin{cases} K_0' = \ln\{2\sqrt{\cosh(2K_1)}\} \\ K_1' = \ln\sqrt{\cosh(2K_1)} = \boxed{\frac{1}{2}\ln\cosh(2K_1)} \rightarrow \boxed{\tanh K_1' = \tanh^2 K_1} \end{cases}$$

$$K_2' = 0$$

یادآوری رفتار تابع پتانسیل ترمودینامیکی

$$Z_N(K_0, K_1, K_2) = Z'_{N/2}(K_0', K_1', K_2')$$

$$f = \frac{F}{N}$$

$$\begin{cases} f = \dfrac{-K_B T \ln Z_N(K_0, K_1, K_2)}{N} \\ f' = \dfrac{-K_B T \ln Z'_{N/2}(K_0', K_1', K_2')}{N/2} \end{cases}$$

$$f = \frac{K_B T}{2} K_0' - \frac{K_B T}{N} \ln Z'_{N/2}(K_1', K_2')$$

$$\{K'\} = \{K^*\} = R\{K^*\}$$ نسبت به توابع نقطه جاذب

معادله بازگشتی

$$K_1' = \frac{1}{2} \ln \cosh 2K_1 \longrightarrow \begin{cases} K_1^* = 0 \rightarrow T_c = \infty \\ K_1^* = +\infty \rightarrow \underbrace{T_c = 0} \end{cases}$$

$$K_1 = \frac{J}{K_B T}$$

قبلاً دیده بودیم

$$t = e^{-\beta J / K_B T}, \ \beta > 0 \longleftarrow \boxed{\cancel{t = \frac{T - T_c}{T_c}}}$$

$$T \to T_c \to t \to 0$$

$$\boxed{t = e^{-pK_1}}$$

$$K_1' = K_1 - \tfrac{1}{2}\ln 2$$

$K_1^* = \infty$ حول

$$t' = e^{-pK_1'} = e^{-p(K_1 - \frac{1}{2}\ln 2)}$$

$$t' = e^{-pK_1}\, 2^{p/2}$$

$$t' = t\, 2^{p/2}$$

$$\{ t_\ell = \ell^{x_t}\, t \}$$

$\ell = 2$

$$\boxed{t' = t_2 = 2^{x_t}\, t}$$

$$t' = 2^{x_t}\, t = 2^{p/2}\, t \longrightarrow \boxed{x_t = p/2}$$

$$\boxed{x_t = 1} \longleftarrow \underline{p=2}$$ لطفاً: بزرگتری خواهیم دید

دیگری

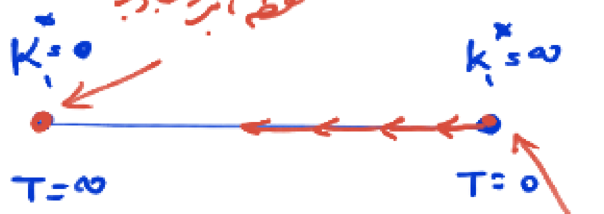
$\alpha = 2 - 2/p$

$\beta = 0$

$\gamma = \frac{2}{p}$

$\delta = \infty$

$\eta = 1$



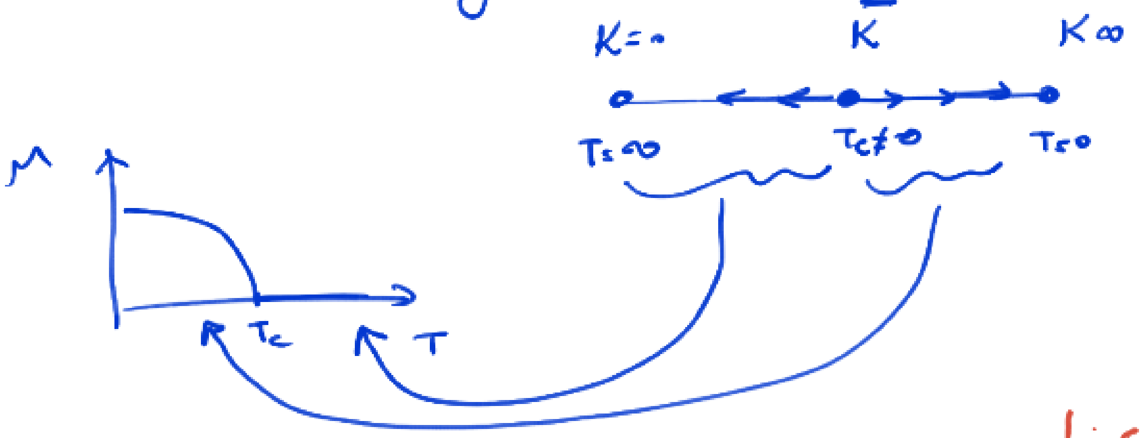
$K_1 = \infty$ حول $\boxed{K_1' = K_1 - \frac{1}{2}\ln 2}$

مثبت

حول K_1 بی‌نهایت بسط دادم

$$\to \{K'\} = R_\ell \{K\}$$

Ex 2D Ising chapter 14. Pathria



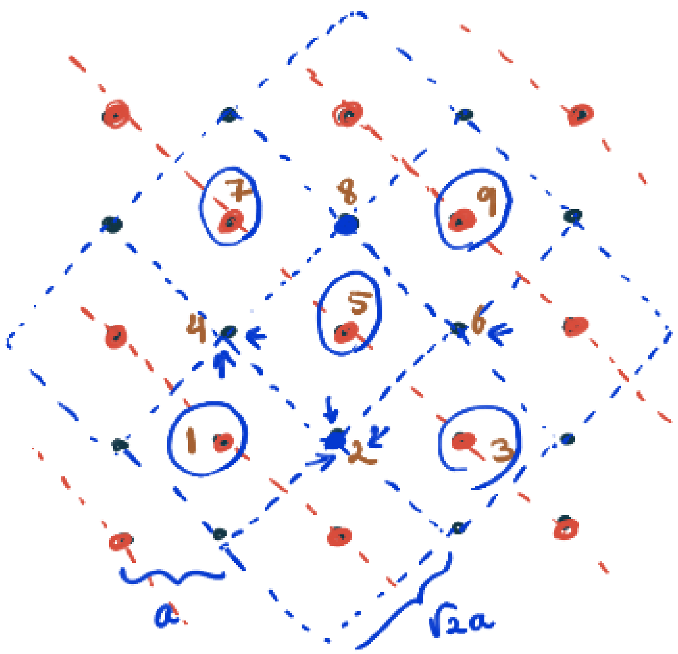
به نام خدا

با روش بلوک بندی به دنبال یافتن رابطه بازگشتی هستیم برای مدل ایزینگ 2D

$$Z(N,\{K\}) = \sum_{\{S_i\}} e^{K \sum_{n.n} S_i S_j}$$

n.n. ≡ Nearest Neighbor

نزدیک‌ترین همسایه



$$\ell = \sqrt{2}$$

برای مثال اگر روی S_5 جمع بزنیم خواهیم داشت

$$\sum_{S_5=\pm 1} e^{K S_5 S_2 + K S_5 S_4 + K S_5 S_8 + K S_5 S_6} = 2\cosh K[S_2 + S_4 + S_6 + S_8]$$

بسته به اینکه مقادیر s_2, s_4, s_6, s_8 چه اعدادی باشند حالت های مختلفی دارد. $2^4 = 16$ حالت

1. $S_2 = S_4 = S_6 = S_8$
2. $S_2 = S_4 = S_6 = -S_8$
3. $S_2 = S_4 = -S_6 = -S_8$
4. $S_2 = -S_4 = -S_6 = S_8$

مجهول

$$2\cosh K[S_2+S_4+S_6+S_8] = e^{[A+B(S_2S_4+S_2S_6+S_6S_8+S_4S_8)]}$$

دو مجهول: ضرایب جفت شدگی بعد از جمع زدن روی نصف اسپین ها است.

$$[K'] \equiv [A, B]$$

پس سایر اندرکنش ها را هم در نظر بگیریم:

$$2\cosh K[S_2+S_4+S_6+S_8] = e^{[K_0' + \frac{1}{2}K_1'(S_2S_4+S_2S_6+S_4S_8+S_6S_8) + K_2'(S_2S_8+S_4S_6) + K_3'(S_2S_4S_6S_8)]}$$

$K_0', K_1', K_2', K_3' \equiv$ مجهول ها

$$\begin{cases} K_0' = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\cosh 2K + \frac{1}{8}\ln\cosh 4K \\ K_1' = \frac{1}{4}\ln\cosh 4K \\ K_2' = \frac{1}{8}\ln\cosh 4K \\ K_3' = \frac{1}{8}\ln\cosh 4K - \frac{1}{2}\ln\cosh 2K \end{cases}$$

یعنی شکل تابع پارش

$$Z(N,T,[K]) = Z'(N/2, T, [K'])$$

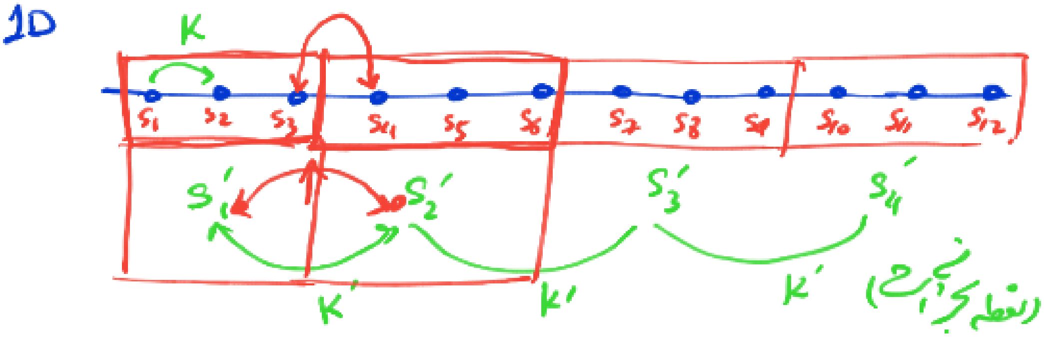
$$= e^{\frac{N}{2}K_0'} \sum_{\{S_i'\}} e^{K_1' \sum_{jl,\ n.n} S_j' S_l' + K_2' \sum_{jl,\ n.n.n.} S_j' S_l' + K_3' \sum_{Seq.} S_j' S_l' S_n' S_m'}$$

نشان دهید

$$\boxed{\begin{aligned} & f(K_0=0, K_1, K_2=0, K_3=0) \\ & = -\tfrac{1}{2}K_0' + \tfrac{1}{2} f'(K_1', K_2', K_3') \end{aligned}}$$

توصیف کیفی از [illegible] آیزینگ 1D, 2D : ص ۲۷ کاردی

1D



قطعه → هر ۲ (نقطه بحرانی)

$K' = R_\ell[K]$

یافتن نقطه بحرانی $\longrightarrow K^* = R_\ell[K^*]$

اگر در نظر بگیریم که خیلی نزدیک به نقطه بحرانی هستیم

$K' \simeq K$ [illegible]

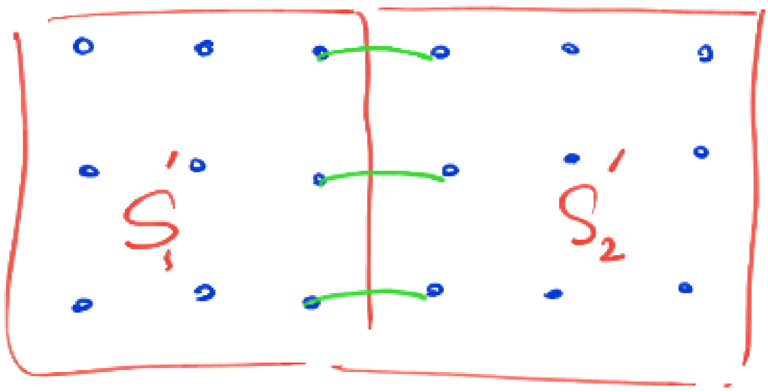
$$\mathcal{H} = K\sum S_i S_j \longrightarrow \mathcal{H}' = K'\sum S_i' S_j'$$

بعد از یک قطع کردن
در تعیین درجات
و جمع روی آن

$$\underbrace{K' S_1' S_2' = K S_3 S_4} \longleftarrow$$

Ising 1D در $K' \simeq K$

2D



$K' \simeq 3K \leftarrow$ 2D

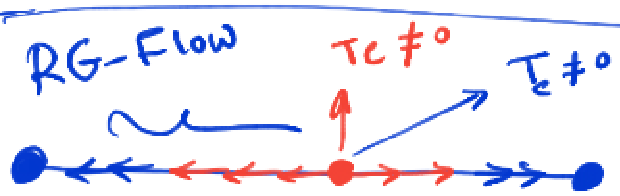
$$*\ \boxed{K' \sim \ell^{d-1} K}\ *$$

$d \equiv$ Dimension

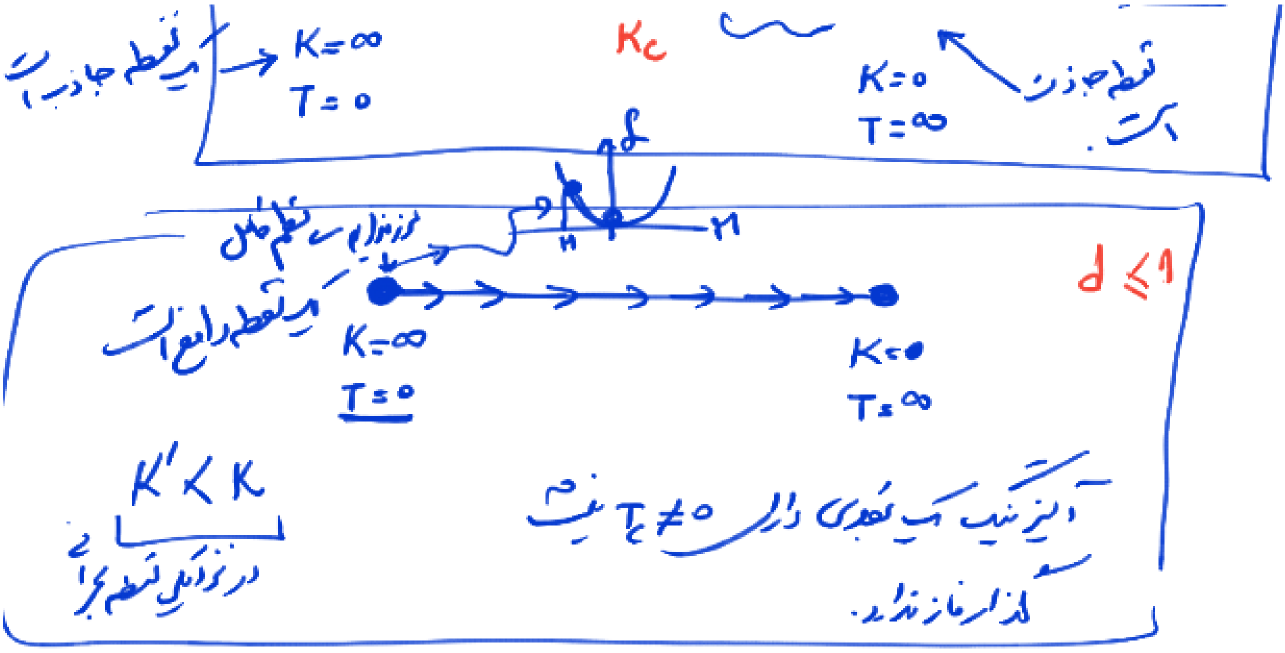
وقتی $d > 1$ یعنی $d \geqslant 2$ بعد از مقیاس کردن‌های مختلف $\ell > 1$

$K' > K$

نقاط جاذب $\begin{cases} K = 0 \rightarrow T = \infty \\ K = \infty \rightarrow T = 0 \end{cases}$



$\leftarrow$ $\underline{\underline{d > 1}}$



RG- General Formalism

$R_\ell \equiv R \circ R \circ I$

$\underbrace{[K^*] = R_\ell [K^*]}$ ⟵ ✓ ? fixed points ① نقاط ثابت

② نماهای بحرانی را بدست آوریم.

③ چگونگی تحول سیستم تحت RG را بررسی کنیم.

$[K] = \{K_0, K_1, \dots K_n\}$ $\qquad n \equiv$ # of coupling constants

$$e^{-\beta F} = Z(N,[K]) = \sum_{\{s\}} e^{-\beta \mathcal{H}(\{s\},[K])}$$

De-dicoration
$$\begin{cases} N \to N_\ell = N/\ell^d = N\ell^{-d} \\ \xi \to \xi_\ell = \xi \ell^{-1} \end{cases} \qquad \underbrace{\ell > 1}$$

$N'K' = \dots -\beta \mathcal{H}(\{s'\},[K'])$

$$\bar{e}^{\beta F} = e^{N K_0} \sum_{\{s'\}} e$$

$$f([K]) = \ell^{-d}\left[-K_0' + f([K'])\right]$$

$$[K] \xrightarrow{R_\ell} [K'] = R_\ell [K]$$

Renormalization group Operator

$$[K] \longrightarrow [K'] \longrightarrow [K''] \longrightarrow \cdots$$

مفهوم شارش جریان در فضای ضرایب جفت‌شدگی را نشان می‌دهد.

$$\begin{cases} [K]^{(n)} = R_\ell([K]^{(n-1)}) = \cdots \quad R_\ell^{(n)}([K]^{(0)}) \leftarrow \\ \xi^{(n)} = \ell^{-n} \xi^{(0)} \leftarrow \end{cases}$$

$$R_\ell^{(n)} = R_{\ell^n} \leftarrow$$

چون می‌توان عملگر R_ℓ را هر تعداد دلخواه بر روی سیستم مورد مطالعه اعمال کنیم

و پس از هر عمل

$$\begin{cases} \rightarrow \xi_\ell = \ell^{-1} \xi \leftarrow \\ \lim_{n\to\infty} \xi_\ell^{(n)} = \ell^{-n} \xi \longrightarrow \begin{cases} \underline{\xi = 0} \\ \underline{\xi = \infty} \end{cases} \end{cases}$$

وجود سیستم در نقطه‌ای

[illegible]

$\xi = 0$

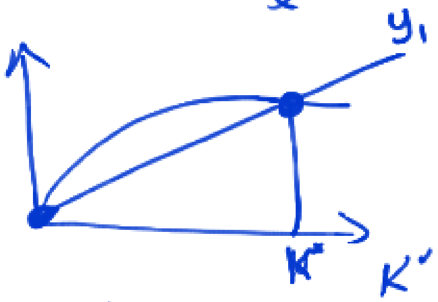
$$\gg \qquad \underbrace{\xi([K']) = \ell\, \xi([K])} \rightarrow \Big|\ \xi = \infty$$

حالت بحرانی

طول همبستگی در ضرایب ثابت $[K^*]$ در ادامه ثابت (بی‌نهایت)

$$[K'] = R_\ell [K] \longrightarrow [K'] = [K^*]$$

$$[K^*] = R_\ell [K^*]$$



$y_1 = K^*$

$y_2 = R(K^*)$

می‌توان نتیجه گرفت که نقطه ثابت جایی که با RG چیزی عوض نمی‌شود

شرط $\boxed{[K^*] = R_\ell [K^*]}$ fixed point

* شرط RG *

$$[K] \longrightarrow \underbrace{[K'] = R_\ell [K]}$$